Lección n°2: Categorías.

EPN, 2021

2. Recuento histórico

La teoría de categorías es una disciplina que busca mirar, desde lejos, patrones que se repiten o que pueden ser previstos desde distintas ramas de la matemática. Esto lo logra estudiando las distintas aplicaciones (en un sentido más general al concepto de función, como veremos más adelante) que pueden existir entre objetos matemáticos.

Estas aplicaciones serán representadas por flechas y buscarán preservar de alguna forma la estructura de los objetos que manipulemos. Se puede entender a la teoría de categorías, como un estudio abstracto de las transformaciones o relaciones que hay entre los objetos matemáticos; con el fin de analizar, indirectamente, a los mismos.

Un análogo se puede ver en la física, donde el estudio de planetas fuera del sistema solar, se calcula por su incidencia en las órbitas y luminosidad de otros objetos; a veces, sin ser necesario verlos por telescopio, ya que esto es casi imposible por ser muy pequeños y estar muy lejos. Esta clase de perspectiva es fundamental en teoría de categorías y la hace distinta al paradigma más común en las matemáticas, enfocado en conjuntos.

La linea temporal de este campo de estudio es grosso modo la siguiente:

1945 Eilenber y Mac Lane escriben el paper "General theory of natural equivalences", el cual fue la publicación original en donde la teoría fue por primera vez formulada.

Años 40 Las principales aplicaciones en el origen de la teoría se desarrollaron y fueron en los campos de topología algebraica, teoría de homología particular y álgebra abstracta.

Años 50 Grothendieck, entre otros, empezaron a usar con gran éxito la teoría de categorías en geometría algebraica.

Años 60 F.W. Lawvere y otros empezaron a aplicar de forma novedosa la teoría de categorías en lógica, revelando sorprendentes e inesperadas consecuencias.

Años 70 Se encontraron más aplicaciones, incluso fuera de la matemática, en áreas de la ciencia computacional, lingüística, ciencia cognitiva, filosofía, entre otras.

Con la teoría de categorías podemos realizar muchas cuestiones prácticas, como son:

- Ahorrar en una sola demostración, en teoría de categorías, la demostración de otros teoremas en ramas como análisis, álgebra, geometría, los cuales no siempre se ven relacionados.
- Encontrar qué construcciones matemáticas se pueden relacionar bajo un mismo concepto, ya sea que se vean muy similares: el producto de espacios medibles con respecto el producto de espacios topológicos; o en contraste, con otros que aparentemente no tienen nada que ver: la suma de espacios vectoriales con respecto al mínimo común múltiplo de dos números.

- Formalizar cierto lenguaje que se usa de manera cotidiana en la matemática pero no es usual definir. Por ejemplo, cómo, dado V un espacio vectorial finito, la generación de una base del espacio doble dual V^{**} nos parece menos arbitraria que una para el espacio dual V^*, de hecho, intuitivamente más *natural*.

- Entenderemos nuevos conceptos relevantes como son las propiedades universales y funtores, que nos darán nuevas perspectivas de algunos teoremas clásicos.

Existen muchos libros y referencias en teoría de categorías (en inglés) que han sido usados para la elaboración de estas lecciones y pueden ser recomendados; ya sea como acompañantes, para contrastar lo expuesto aquí; o para estudios posteriores, para el lector interesado en profundizar.

- "Categories for the Working Mathematician", Segunda edición, de Saunders Mac Lane. Este libro está escrito por uno de los fundadores de la teoría de categorías. Es clásico, conciso y una de las principales referencias para cualquier trabajo en este campo de las matemáticas, pero no es amigable para una primera lectura.

- "Basic Category Theory" de Tom Leinster y "Category Theory" de Steve Awodey, son textos populares para introducirse en la materia, los prerrequisitos para su lectura son mínimos y sus explicaciones tienen gran detalle.

- "Category theory in context" de Emily Riehl, es una referencia moderna y extensa, con énfasis en ejemplos en la matemática pura, como la teoría de Galois y homología, y la investigación actual. Con motivo similar, el libro "Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats" es una referencia útil para conocer de las fundaciones y aplicaciones de la teoría de categorías.

- Existen también recursos virtuales, dos de los más convenientes son:

  "nLab" (`https://ncatlab.org/nlab/show/category+theory`) es un repositorio digital y un proyecto colaborativo en Matemáticas, Física y Filosofía, con énfasis en usar las ideas y conceptos de la teoría de categorías. Tiene un buscador implementado.

  "Math3ma" (`https://www.math3ma.com/categories/category-theory`) es un blog escrito por Tai-Danae Bradley, para la divulgación científica en matemáticas. Las entradas en teoría de categorías ayudan a desarrollar la intuición y a hacerse una idea de como y por qué existen los conceptos usados. También se habla de la teoría de categorías aplicada, y de los foros o conferencias que existen en la materia.

3. ¿Qué es una categoría?

Definición. *Una* ***categoría*** $\mathscr{A}$ *está compuesta por*

- *Una clase* $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ *cuyos elementos son llamados* ***objetos*** *de* $\mathscr{A}$ *y representados por las letras* $A, B, C, D, \ldots, Z, w, x, y, z$.

- *Para cada par de objetos de* $\mathscr{A}$, A *y* B, *una clase* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *cuyos elementos son llamados* ***flechas*** *o* ***morfismos*** *de* A *hacia* B, *representados por las letras* $f, g, h, i, \ldots$

Además, las clases $\mathrm{Hom}(A, B)$ *deben cumplir las siguientes propiedades*

(1) *Son disjuntas, es decir* $\mathrm{Hom}(A, B) \cap \mathrm{Hom}(C, D) = \varnothing$ *si* $A \neq C$ *o* $B \neq C$.

(2) *Para cada objeto* A *existe un elemento en* $\mathrm{Hom}(A, A)$, *al cual denotaremos por* 1_A *y llamaremos la* ***identidad*** *en* A.

(3) Para cada tripleta de objetos (A, B, C) existe una función:

$$\begin{array}{rcl} \circ_{A,B,C} : \mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A, C) \\ (f, g) & \longmapsto & h \end{array}$$

A la flecha h se la denotará, simplemente, como $h = g \circ f$ y diremos que es la ***composición*** *de f con g. A todas las funciones $\circ_{A,B,C}$ se las representará por un único símbolo $\circ$, al cual se le dirá la operación composición.*

(4) La flecha identidad se comporta como un ***elemento neutro*** *con respecto a la composición, es decir, $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$ para todo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$.*

(5) La operación composición es ***asociativa****, esto quiere decir que*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$, $h \in \mathrm{Hom}(C, D)$.

Cualquier cosa que cumpla lo anterior es una categoría, incluso conceptos que se escapan a la matemática tradicional como son aspectos de la filosofía y la informática.

Notación.

- *Es usual escribir $f : A \to B$ para una flecha $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Además, diremos que A es el dominio de f y B es el codominio de f, esto lo escribiremos como $A = \mathrm{dom}(f)$ y $B = \mathrm{cod}(f)$, respectivamente. Gracias a la propiedad (1), el dominio y codominio de cualquier flecha son únicos.*

- *A la colección de las flechas de $\mathscr{A}$ la notaremos por $\mathrm{Hom}(\mathscr{A})$. Por razones históricas, los primeros ejemplos de flechas en categorías eran homomorfismos de algún tipo, he ahí la razón de esta convención.*

  Recordemos que, en la lección 1, se habló que el dual de un espacio vectorial E se puede escribir como $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{R})$, esto es acorde con nuestra notación ya que en la categoría $\mathbf{Vect}_k$ este conjunto es el de todas las funciones lineales $f : E \to \mathbb{R}$.

  Es inmediato que
  $$\bigcup_{A,B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})} \mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(\mathscr{A}).$$

- *Si el contexto no es claro o se está trabajando con varias categorías, a la clase $\mathrm{Hom}(A, B)$ se le escribe como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$. Para estas clases, si son conjuntos, las llamaremos "hom-sets". En ocasiones en la literatura, se puede encontrar también la notación $\mathscr{A}(A, B)$ o $\mathrm{Mor}(A, B)$ para referirse a esta clase.*

- *Usualmente escribiremos fg, en lugar de $f \circ g$, para la composición, cuando esto sea prudente.*

Observación 5.

- *Con la notación anterior podemos crear un diagrama ilustrando la propiedad (3):*

  (3)*: *Para todo par de flechas $f : A \to B$, $g : B \to C$ en $\mathscr{A}$, existe una flecha $g \circ f : A \to C$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

- *Una de las primeras nociones que vamos a usar es la **diagrama conmutativo**.*

  *Un **diagrama** es la representación gráfica de una categoría o de una parte de la misma, como lo ilustramos al dibujar la composición de flechas. Más precisamente, es un grafo dirigido en donde representamos, con vértices y aristas, a los objetos y flechas de nuestro interés.*

  Diremos que un diagrama es conmutativo (o que conmuta) cuando para cada par de objetos, si es que existen varios caminos (sucesiones de flechas) que conectan a ambos, entonces estos caminos son iguales. Por ejemplo, se dice que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "j"] \\ C \arrow[r, "i"] & D \end{tikzcd}$$

  cuando se cumple que $if = jg$, es decir, que unívocamente podemos asignar una flecha diagonal.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "s=if=jg" description] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

  Notemos también que la condición de asociatividad, nos dice que cada vez que encontremos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\,f"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\,g"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

  entonces este conmuta.

- *A continuación algunas observaciones adicionales:*

  a) No necesariamente las colecciones de objetos o flechas son conjuntos (Pueden ser clases propias)

  b) Tampoco deben ser conjuntos, los objetos. Ni funciones, las flechas.

  c) La composición de flechas no tiene que ser composición de funciones.

  *Aún así, en la practica muchas categorías sí cumplen con tener conjuntos y funciones como sus componentes a estas las llamaremos **categorías concretas**, noción que haremos* *precisa más después pero que ilustramos ahora.*

3.1. Ejemplos

Los ejemplos más útiles de categorías son las que además tienen una estructura en cada objeto y las flechas preservan esa estructura. Las conoceremos como concretas. En todo el ejemplo siguiente, la operación composición es la composición de funciones.

Ejemplo 3.1. *Categorías "concretas"*

- *La categoría **Set** que tiene como objetos a conjuntos y como flechas a las funciones.*
- *La categoría **Set*** que tiene como objetos a conjuntos, cada uno de ellos con un punto distinguido, y como flechas a funciones que preservan estos puntos, es decir si* $(A, x_A), (B, x_B)$*, donde* x_A, x_B *son los puntos distinguidos de* A *y* B *respectivamente, entonces una flecha* $f : (A, x_A) \to (B, x_B)$ *es una función de* A *hacia* B *tal que* $f(x_A) = x_B$.
- *La categoría **Mon** que tiene como objetos a los monoides y como flechas a los homomorfismos de monoide.*
- *La categoría **Grp** que tiene como objetos a los grupos y como flechas a los homomorfismos de grupos.*
- *La categoría **Ab** que tiene como objetos a los grupos abelianos y como flechas a los homomorfismos de grupos.*
- *La categoría **Ring** que tiene como objetos a los anillos (con unidad) y como flechas a los homomorfismos de anillos.*
- *La categoría **CRing** que tiene como objetos a los anillos (con unidad) conmutativos y como flechas a los homomorfismos de anillos.*
- *La categoría **Pos** que tiene como objetos a los conjuntos parcialmente ordernados (Posets) y como flechas a las funciones monónotonas crecientes.*
- *La categoría **Top** que tiene como objetos a los espacios topológicos y como flechas a las funciones continuas.*
- *La categoría **Top*** que tiene como objetos a los espacios topológicos con puntos distinguidos y como flechas a las funciones continuas que preservan a estos puntos.*
- *Dado un campo* k*, la categoría* $\boldsymbol{Vect}_k$*, que tiene como objetos a los espacios vectoriales sobre* k *y como flechas a funciones lineales.*
- *Dado un anillo unitario* R*, la categoría* $\boldsymbol{Mod}_R$ *de módulos sobre* R *(por la derecha) y* R*-módulo homomorfismos. Si* R *es un campo* k*, entonces* $\mathbf{Mod}_R = \mathbf{Vect}_k$*, si es que* $R = \mathbb{Z}$ *entonces* $\mathbf{Mod}_R = \mathbf{CRing}$*. (Revisaremos más acerca de módulos en otra lección).*
- *La categoría* $\boldsymbol{Man}^p$ *de las variedades* p*-diferenciables y como flechas, funciones* p*-diferenciables. Si* $p = \infty$*, entonces se escribirá **Man**.*
- *La categoría **Meas** de espacios medibles y de funciones medibles.*
- *La categoría **Graph** de grafos y de homomorfismos de grafos, esto es, funciones que envían vértices a vértices, y aristas a aristas, con la condición extra de que si dos vértices son adyacentes entonces también lo serán los respectivos vértices en la imagen de la función.*

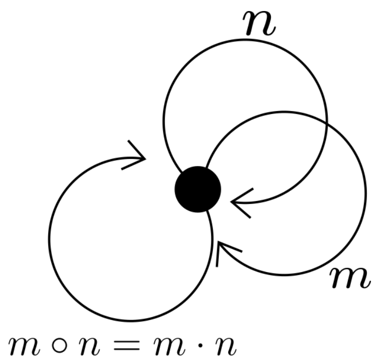
Ejercicio 3.2. *Pruebe que todas las anteriores estructuras son, en efecto, categorías.*

*Pista: Compruebe rigurosamente que **Set** es una categoría, con eso deduzca la asociatividad de las flechas para los otras categorías, luego de ello investige si las identidades y la composición están bien definidas en cada literal (use teoremas del estilo, "la composición de funciones continuas es continua", "la composición de funciones medibles es medible").*

Uno podría engañarse fácilmente pensando que todas las categorías son solo una forma de catalogar específicos tipos de conjuntos con funciones que los relacionan de una forma que respeta su definición o naturaleza, sin embargo, esto no tiene porque ser cierto. En primer lugar porque los propios objetos pueden ser categorías en su propio derecho.

Ejemplo 3.3. *Todo monoide M se lo puede ver como una categoría $\mathscr{M}$ de un solo elemento. Para ello, sea cualquier elemento $\bullet$ (no es necesario especificar a donde pertenece) que será el único objeto de la categoría que estamos construyendo y sean $\{m_i\}_{i\in I}$ los elementos de M.*

Definimos ahora flechas $m_i : \bullet \to \bullet$ en $\mathscr{M}$, para cada elemento m_i. La composición de dos flechas m y n es simplemente la operación $m \cdot n$ en el monoide M.



Como M es monoide con la operación $\cdot$, sabemos por definición que existe un elemento unidad e, está será la flecha identidad en $\bullet$. Además, la operación $\cdot$ será cerrada, es decir $m \cdot n \in M$ si es que m, n pertenecen a M, y asociativa. Gracias a esto $\mathscr{M}$ con objeto $\bullet$ y flechas $\{m_i\}_{i\in I}$ cumple los axiomas de la definición de categoría.

Recíprocamente, toda categoría $\mathscr{M}$ con un solo objeto, se le puede asignar un monoide M. Estas asignaciones son únicas salvo isomorfismo, en un sentido que haremos claro.

Podemos notar del anterior ejemplo que la naturaleza del único objeto $\bullet$ no es relevante para la estructura de la categoría que describimos. En palabras sucintas, podemos elegir cualquier elemento que queramos. En teoría de categorías son mucho mas importantes las flechas que los objetos.

Otros ejemplos de este estilo son los siguientes:

Ejemplo 3.4. *Tomemos cualquier conjunto parcialmente ordenado $(P, \leqslant)$, entonces lo podemos ver como una categoría $\mathscr{P}$, en donde los objetos son los elementos de P y para cada par de objetos $a, b \in \mathrm{ob}(\mathscr{P}) = P$, existe una flecha $f : a \to b$ si y solamente si $a \leqslant b$. Al igual que antes esta asignación es esencialmente única.*

Ejemplo 3.5. *Consideremos cualquier conjunto S, entonces a S lo podemos ver como una categoría en donde los objetos son los elementos del conjunto y solamente asignamos a cada objeto la función identidad. Esta categoría $\mathscr{S}$ cumple que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(A, B) = \varnothing$ si $A \neq B$. A las categorías* *que cumplen lo anterior se las conocen como **categorías discretas**. Las categorías discretas solamente contienen a objetos, sin que dos objetos distintos estén conectados por flechas.*

Por otro lado, es importante precisar un poco mejor, lo que se entiende por diagrama.

Ejemplo 3.6. *Consideremos un grafo dirigido $G = (V, E)$ con conjunto de vértices V y aristas E, entonces no necesariamente al tomar la colección de objetos, por el conjunto V, y la de flechas, por el conjunto E, se define una categoría. ¿Por qué? La razón es que la operación composición no estaría bien definida.*

*Sin embargo, a toda categoría sí se le puede asignar un único grafo dirigido (salvo isomorfismo), simplemente haciendo la operación inversa, esto es, hacer vértices a los objetos y aristas a las flechas. De hecho, algunos autores definen a las categorías como un tipo especial de grafo. Al grafo asignado a la categoría se le dice **grafo subyacente**. Un diagrama, será entonces un subgrafo del grafo subyacente.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr] & B \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[dl] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

El grafo dirigido de la izquierda es el diagrama de una categoría, al contrario del de la derecha.

Observación 6. *En general, los grafos descritos antes están bien definidos, solo cuando las clases de flechas y objetos son conjuntos. Estas consideraciones las tomaremos en cuenta más adelante, cuando restringiremos nuestros estudio a categorías pequeñas y/o localmente pequeñas.*

Algunos ejemplos, sin embargo, son menos convencionales.

Ejemplo 3.7.

- *Podemos, de forma similar a **Meas**, definir **Measure**, la cual tiene espacios medibles como objetos, pero ahora una flecha $[f] : X \to Y$ en **Measure** es una clase de equivalencia en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Meas}}(X, Y)$, donde la relación de equivalencia es*

  $$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ \mu\text{-c.t.p},$$

  aquí μ es la medida del espacio X.

  Usualmente este tipo de construcciones se usa cuando se trabaja en espacios de Lebesgue, en el análisis matemático, donde es conveniente que cada función sea, en realidad, una clase de equivalencia de funciones de la cual sacamos un representante.

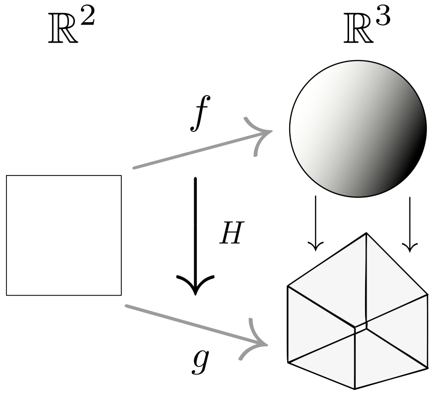
  Si $[f], [g]$ son dos flechas aquí, entonces su composición se define como $[f] \circ [g] := [f \circ g]$, para comprobar que esta composición es correcta se debe demostrar que si $f = f'$ μ-c.t.p y $g = g'$ μ-c.t.p, entonces $f \circ g = f' \circ g'$ μ-c.t.p.

- *Con el mismo sabor que la anterior categoría podemos definir **Toph** y **Toph*** las cuales tiene como objetos a los mismos de **Top** y **Top***. Ahora, una flecha $[f] : X \to Y$ en **Toph**, es una clase de equivalencia en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ donde la relación de equivalencia es la de **homotopía**, esto es:*

  $$f \sim g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Existe } H : X \times [0, 1] \to Y \text{ función continua, tal que} \\ H(x, 0) = f(x) \text{ y } H(x, 1) = g(x) \ \text{ para todo } x \in X. \end{cases}$$

De manera sucinta, $f \sim g$ (f es homotópicamente equivalente a g) si es que existe una deformación continua; en este caso H, que empieza en f y termina en g.

Como antes, la composición entre dos flechas $[f], [g]$ es a través de representantes: $[f \circ g] = [f] \circ [g]$.



Una homotopía: $f \sim g$ donde $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son parametrizaciones de una esfera y un cubo y H denota una deformación continua de las mismas

*La categoría **Toph*** es construida similarmente: cada flecha $[f] : X \to Y$, en **Toph***, es una clase de equivalencia en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^*}(X, Y)$, donde si p_x y p_y son los puntos distinguidos de X y Y, entonces la relación de equivalencia es la de **homotopía que preserva puntos**, esto es:*

$$f \sim g \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{Existe } H : X \times [0,1] \to Y \textit{ función continua tal que} \\ H(x,0) = f(x) \textit{ y } H(x,1) = g(x) \;\; \textit{para todo } x \in X \textit{ y, además} \\ H(p_x, t) = p_y \;\; \textit{para todo } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Ejercicio 3.8. *Pruebe que ambas relaciones descritas anteriormente son de equivalencia. Luego, demuestre que la composición de clases de equivalencia está bien definida como la clase de equivalencia de la composición de cualesquier par de representantes, es decir: $[f] \circ [g] = [f \circ g]$. Deduzca entonces que **Toph** y **Toph*** son categorías.*

Sugerencia: Tomar como ejemplo el ejercicio análogo hecho en la lección 1 en la sección de Grupo fundamental o consultar la primera referencia citada en esa lección.

- *Dado un sistema deductivo de lógica, existe una categoría de demostraciones, en el que los objetos son fórmulas y para cada par de fórmulas ϕ, ψ, existe una flecha $f : \phi \to \psi$ cuando existe una demostración que asume ϕ y deduce ψ.*

- *Fijamos un anillo (siempre asumiremos que tiene unidad) R y creamos la categoría $\mathbf{Mat_R}$ en donde los objetos son los números naturales $1, 2, \ldots$ y las flechas $m \to n$ son todas las matrices en R de dimensión $n \times m$. La composición de flechas es la multiplicación de matrices*

Como podemos ver por los anteriores ejemplos, muchas veces las flechas en una categoría no tienen que representar una función. Tratemos ahora de clasificar las categorías con pocos elementos.

Ejemplo 3.9. *Consideremos un poset $(P, \leqslant)$ como categoría, entonces para cada par de elementos x y y existe a lo más una flecha. De forma conversa, dado una categoría con a lo más* *una flecha en cada* $\hom(A,B)$ *para todo par de objetos* $\hom(A,B)$*, entonces podemos definir una relación de orden parcial declarando que* $A \leqslant B$ *si existe una flecha* $f : A \to B$*.*

En ambos casos se los conoce como ***categorías delgadas****. Escribamos los diagramas de las posibles categorías de este estilo con un número finito de objetos* n*.*

n	*Categorías delgadas con* n *objetos*
0	
1	$\bullet$
2	$\bullet \quad *$; $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & * \end{tikzcd}$
3	$\begin{tikzcd} \bullet & * \\ \clubsuit & \end{tikzcd}$; $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & * \\ \clubsuit & \end{tikzcd}$; $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & * \\ \clubsuit & \end{tikzcd}$; $\begin{tikzcd} \bullet & * \arrow[l] \\ \clubsuit \arrow[u] & \end{tikzcd}$; $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & * \\ \clubsuit \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$

No se ha dibujado las flechas identidades y no se ha considerado el orden de los elementos. El número de categorías delgadas, así clasificadas, con n objetos crece mucho, por ejemplo Para $n = 4$ *es igual a* 16*. En general, por lo que hemos visto, será igual al número* x_n *de órdenes parciales que podemos definir en un conjunto de n elementos sin etiquetar. Más términos de* x_n *se encuentran en* `https://oeis.org/A000112`*.*

Lo anterior es un caso particular de los siguientes tipos importantes de categorías:

Definición. *Una categoría* $\mathscr{C}$ *es* ***finita*** *si es que* $\mathrm{ob}(\mathscr{C})$ *y* $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ *son ambos dos conjuntos finitos.*

Es ***pequeña*** *si es que* $\mathrm{ob}(\mathscr{C})$ *y* $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ *son conjuntos (no clases propias).*

Es ***localmente pequeña*** *si es que* $\mathrm{Hom}(A,B)$ *es un conjunto para todos los objetos* A *y* B*.*

Podemos ver que todas las categorías en el ejemplo 1.2.1 son localmente pequeñas y en el ejemplo 1.2.9 son finitas.

4. Construcciones en categorías

Dada una categoría siempre podemos construir a partir de ella, muchas otras. Exponemos las principales contrucciones que se usan en la teoría.

Definición. *La* ***categoría opuesta****, o también llamada* ***categoría dual****, de* $\mathscr{A}$*, notada como* $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$*, es definida con la colección de objetos* $\mathrm{ob}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ *(tiene los mismos objetos) y tal que para todo par de objetos* A, B *se tiene que* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}(A,B) = Hom_{\mathscr{A}}(B,A)$ *(todas las flechas se invierten).*

Observación 7. *Lo último significa que una flecha $f : X \to Y$ en $\mathscr{A}^{op}$ es la misma que la flecha $f : Y \to X$ en $\mathscr{A}$ y la composición fg en $\mathscr{A}^{op}$ es la misma que gf en $\mathscr{A}$. Observemos también que $(\mathscr{A}^{op})^{op} = \mathscr{A}$.*

$\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd] & B \arrow[d] \arrow[ddl] \\
 & D \arrow[dl] \\
C &
\end{tikzcd}$$

$\mathscr{A}^{op}$

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[l] \\
 & D \arrow[ul] \arrow[u] \\
C \arrow[uu] \arrow[uur] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Es usual hablar del **principio de dualidad**, el cual de manera informal nos dice que toda definición, teorema y demostración que solo dependa del lenguaje de la teoría de categorías y que nos de información de $\mathscr{A}$; tiene un enunciado dual en $\mathscr{A}^{op}$, que se logra realizando la demostración de forma análoga, revirtiendo las flechas.

Ejemplo 4.1. *Es común encontrar cuando se estudia conjuntos parcialmente ordenados, enunciados de este estilo:*

1) *Sean B y C dos subcojuntos de A tales que ambos tienen un supremo en A, entonces si $B \subseteq C$,*

$$\textit{se tiene que } \sup B \leqslant \sup C.$$

2) *Sean B y C dos subcojuntos de A tales que ambos tienen un ínfimo en A, entonces si $B \subseteq C$,*

$$\textit{se tiene que } \text{ínf}\, B \geqslant \text{ínf}\, C.$$

Si consideramos al conjunto parcialmente ordenado A como una categoría, y dado que sup *e* ínf *son casos particulares de nociones categóricas (como veremos en lecciones posteriores, son tipos de límites). Así,* 1) *y* 2) *son enunciados duales.*

Definición. *La* ***categoría producto*** *de dos categorías $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, notada por $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, es la categoría formada por pares ordenados de objetos y flechas de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. Es decir que para todo $A, A' \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y $B, B' \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$:*

$$\mathrm{ob}(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) = \mathrm{ob}(\mathscr{A}) \times \mathrm{ob}(\mathscr{B}),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A} \times \mathscr{B}}(A \times A', B \times B') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A') \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B').$$

Observación 8. *Aquí no hay problema si no estamos en categorías pequeñas o localmente pequeñas, pues el producto cartesiano se puede definir en clases propias.*

Por otro lado, si observamos a las categorías como grafos entonces el grafo subyacente del producto de dos categorías es conocido como el producto tensorial de sus grafos subyacentes, donde la matriz de adyacencia del producto tensorial de dos grafos, resulta del producto de Kronecker de las matrices de adyacencia de los dos grafos.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(1,A) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & (1,B) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,B) \arrow[d] \\
(2,A) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] \arrow[urr] & (3,A) \arrow[r] & (3,B)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
$$

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ $\qquad\qquad$ $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$

En el gráfico anterior la categoría $\mathscr{A}$ tiene exactamente 3 elementos y 6 flechas (no olvidemos contar las identidades), la categoría $\mathscr{B}$ tiene 2 objetos y 3 flechas, por último la cantidad de elementos de $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ se comporta como esperaríamos: tiene 6 elementos y 18 flechas.

Sin embargo, es mucho más poderoso visualmente buscar representar los diagramas de nuestras categorías en 2 dimensiones (para grafos planares esto siempre es posible) o a lo más 3 dimensiones (para todos los grafos esto es posible, ver "Three-dimensional graph drawing" de Robert F. Cohen).

En el caso del diagrama de $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ (evitando dibujar algunas flechas en las caras), este puede ser representado por un prisma triangular:

$\mathscr{A} \times \mathscr{B}$

$$
\begin{tikzcd}
(1,A) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & (2,A) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& (3,A) \arrow[dd] & \\
(1,B) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (2,B) \arrow[dl] \\
& (3,B) &
\end{tikzcd}
$$

Definición. *Dada cualquier categoría $\mathscr{C}$, se define $\mathscr{C}^{\rightarrow}$, llamada* ***categoría flecha*** *de $\mathscr{C}$, que tiene como elementos a las flechas de $\mathscr{C}$ y para cualesquier par objetos de $C^{\rightarrow}$, esto es $f : A \to B$, $g : C \to D$, entonces existe una flecha $F : f \to g$ si es que existen flechas en $\mathscr{C}$, de la forma $F_1 : A \to C$, $F_2 : B \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_1"] & B \arrow[d, "F_2"] \\
C \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

Observación 9. *De manera sucinta, diremos que $F = (F_1, F_2)$, es decir una flecha en $\mathscr{C}^{\rightarrow}$ corresponde a un par ordenado de flechas en $\mathscr{C}$. Así nuestra construcción no aumenta el número de elementos o flechas de la categoría original, en contraste con la categoría producto.*

Definición. *Dado un objeto A de una categoría $\mathscr{A}$ definimos su* ***categoría slice*** *$\mathscr{A}/A$ como aquella en donde los objetos son $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$ tales que $\mathrm{cod}(f) = A$. Una flecha en $\mathscr{A}/A$, entre $f : B \to A$ y $f' : B' \to A$ es una flecha $g : B \to B'$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & B' \arrow[dl, "f'"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

La siguiente construcción es una generalización de la anterior:

Definición. *Dado un objeto A de una categoría $\mathscr{A}$ definimos la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A)$ (o simplemente $\mathrm{Hom}(-, A)$ si no hay riesgo de confusión) donde los objetos son todas las clases $\mathrm{Hom}(B, A)$ con $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y dado una flecha $g : B \to B'$ en $\mathscr{A}$, una flecha $\mathrm{Hom}(g, A) := \mathrm{Hom}(B', A) \to \mathrm{Hom}(B, A)$ en $\mathrm{Hom}(-, A)$ es la función que asigna para todo $f' \in \mathrm{Hom}(B', A)$ la flecha $f \circ g \in \mathrm{Hom}(B, A)$.*

Ejemplo 4.2. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de una categoría $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[dr, bend right, "f_1"'] \arrow[dr, bend left, "f_2"] & & B \arrow[dl, bend right, "f_3"'] \arrow[dl, bend left, "f_4"] \\
& C & D \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

Entonces se tiene que el diagrama de $\mathscr{A}/C$ es

$$\begin{tikzcd}
 & f_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_A"] \arrow[dr, "g"] & f_3 \arrow[d, "1_B"] & \\
1_C & f_2 \arrow[r, "g"] \arrow[ur] & f_4 & h
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, la categoría $\mathrm{Hom}(-, C)$ está dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B, C) & \mathrm{Hom}(A, C) \arrow[l, "\mathrm{Hom}(g, C)"'] \\
\mathrm{Hom}(C, C) &
\end{tikzcd}$$

Definición. *Dado un objeto A de una categoría $\mathscr{A}$, definimos su* ***categoría co-slice*** *$A/\mathscr{A}$ como aquella en donde los objetos son $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$ tales que $\mathrm{dom}(f) = A$. Una flecha en $A/\mathscr{A}$, entre $f : A \to C$ y $f' : A \to C'$ es una flecha $g : C \to C'$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] & & C' \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Definición. *De manera análoga a la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A)$, podemos definir ahora a la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -)$ usando el diagrama de la anterior definición, donde dado un $g : C \to C'$, se define una flecha $\mathrm{Hom}(A, g) : \mathrm{Hom}(A, C) \to \mathrm{Hom}(A, C')$ como la función que envía para todo $f \in \mathrm{Hom}(A, C)$, la flecha $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, C')$.*

Ejercicio 4.3. *Pruebe que $\mathscr{A}/A = (A/(\mathscr{A})^{op})^{op}$. Pista: Muestre que los objetos de $\mathscr{A}/A$ están en biyección con los objetos de $(A/(\mathscr{A})^{op})^{op}$, lo mismo para flechas.*

5. Isomorfismos, elementos universales y couniversales

La palabra “isomorfismo” abunda en la matemática, pero depende del contexto usado y puede parecer que su definición es arbitraria. En realidad, puede ser descrita de forma satisfactoria y en términos puramente categóricos.

Definición (Isomorfismo)**.** *Diremos que una flecha $f : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$ es un isomorfismo si existe una flecha $g : B \to A$ tal que $fg = 1_B$ y $gb = 1_A$. A la flecha g se le llamará inverso de f. Si es que esto pasa diremos que A y B son isomorfos en $\mathscr{C}$, expresado como $A \cong B$.*

Notemos que la idea de isomorfismo cambia como cambian las naturaleza de las flechas, por ejemplo un isomorfismo en **Set** es simplemente una aplicación biyectiva o biyección, un isomorfismo en **Grp** es un homomorfismo biyectivo, un isomorfismo en **Top** es un homeomorfismo, en **Man** son difeomorfismos.

Por otro lado, en categorías no concretas la cuestión es más pintoresca, en una monoide $(M, \cdot)$ visto como categoría, la existencia de un inverso para m es justamente la existencia de m^{-1} en M tal que $m \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot m = e$.

En un poset P, se tiene que un isomorfismo entre dos elementos se da solamente cuando son iguales. Como ya vimos, aquí hay a lo más una flecha por cada par de objetos; luego, los únicos isomorfismos que hay en un poset son las flechas identidad.

De igual manera, en la categoría $\mathbf{Mat}_{\mathbf{R}}$ los isomorfismos solo pueden darse si $m = n$ y en este caso los isomorfismos son matrices invertibles. En la categoría de fórmulas y demostraciones, un isomorfismo es una equivalencia lógica.

Lema 5.1. *El inverso de un isomorfismo es único.*

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, para alguna categoría $\mathscr{C}$. Sean dos inversos de f: g_1 y g_2, ambos pertenecientes a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ entonces sabemos que $f \circ g_1 = 1_B$, pero también que

$g_2 \circ f = 1_A$, por lo tanto

$$g_1 = 1_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ 1_B = g_2.$$

Alternativamente, si consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[r, "1_A"] & A \\
B \arrow[r, "1_B"] & B \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "1_B"] & B \arrow[u, "g_2"]
\end{tikzcd}$$

entonces este conmuta. □

Gracias al lema anterior podemos hablar de *el* inverso de un isomorfismo f, llamándolo f^{-1}. Sin embargo, esto no significa que si $A \cong B$, entonces hay un único isomorfismo de A hacia B, de hecho pueden haber números isomorfismos:

Ejemplo 5.1. *Consideremos $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, los énteros módulo p, con p un número primo, entonces $\mathbb{Z}_p$, con la operación suma es un objeto de **Grp**. Por otro lado, sea G un grupo multiplicativo dado por la expresión*

$$G = \langle x |\ x^p = e \rangle,$$

es decir, es un grupo generado por el elemento x y de orden p, por lo tanto $G = \{e, x, x^2, x^{p-1}\}$. Entonces $f_1 : G \to \mathbb{Z}_p$ definido en el generador por $f(x) = [1]$, donde $[1]$ es la clase de 1 en $\mathbb{Z}_p$, es un homomorfismo, más aún es biyectivo. Gracias a que p es primo tenemos también que los homomorfismos $f_2, \ldots, f_{p-1}$ definidos en el generador por $f_2(x) = [2], \ldots, f_{p-1}(x) = [p-1]$ son biyectivos ¿Por qué?

*Por lo tanto, hemos definido $p-1$ distintos isomorfismos de G a $\mathbb{Z}_p$ en **Grp**.*

Si $A \cong B$ y existe un único isomorfismo de A hacia B, diremos entonces que son **esencialmente únicos**.

Notación. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ y dos elementos A, B, entonces a la subcolección de* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *compuesta por los isomorfismos de A hacia B sera denotada por* $\mathrm{Aut}(A, B)$*; esto es, porque sus elementos se los llama **automorfismos**. Notemos que esta subcolección es no vacía cuando $A = B$ y en ese caso se obtiene un grupo con la composición como operación, al cual llamamos* $\mathrm{End}(A)$ *y sus elementos serán conocidos como **endomorfismos**.*

Como hicimos en el caso de las monoides podemos ver a cada grupo como una categoría de un solo objeto, solo que ahora cada flecha es un isomorfismo, aquí no hemos hecho más que parafrasear lo que se encuentra más arriba. De manera general, tenemos que:

Definición. *Un **grupoide** es una categoría en la cual todas las flechas son isomorfismos.*

Asi, un grupo es un grupoide de un solo objeto. Cabría preguntarnos que otras estructuras algebraicas (como anillos, módulos o campos) se pueden caracterizar como categorías de un o pocos elementos, podría el lector talvez intentar escribir un anillo como una categoría de un objeto con ciertas propiedades.

Por tanto, es necesario enriquecer la estructura de la operación composición entre flechas, lo cual motiva el estudio de categorías aditivas y abelianas, temas que no serán cubiertos por estas lecciones.

Para nuestros fines consideraremos un primer acercamiento a estos conceptos.

Definición. *Una categoría* $\mathscr{A}$ *es* ***preaditiva*** *si es que cualquier hom-set,* $\mathrm{Hom}(A, B)$*, tiene una estructura de grupo abeliano y cuya operación es distributiva con respecto a la composición. En otras palabras para todo* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *existe una operación* $+_{A,B}$ *en la misma, a la cual sin importar en que hom-set estemos denotaremos por* $+$*, con las siguientes propiedades:*

- $(\mathrm{Hom}(A, B), +)$ *es un grupo aditivo (abeliano).*
- $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ *para todo* $g,\ h \in \mathrm{Hom}(A, B)$ *y* $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$*.*
- $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ *para todo* $f,\ g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ *y* $h \in \mathrm{Hom}(A, B)$*.*

Algunos ejemplos son:

Ejemplo 5.2.

- *Un anillo* A *se puede ver como una categoría preaditiva de un solo objeto* $\bullet$ *donde la suma de dos flechas, es la suma de los dos elementos en* A*. Por otro lado,* A *cumple con ser un grupo abeliano con respecto a la suma, las propiedades distributivas también se verifican gracias a los axiomas de anillo.*
- *Tenemos que* ***Ab*** *es una categoría preaditiva. En efecto, si* $g, h \in \mathrm{Hom}(A, B)$ *son homomorfismos de anillos, definimos su suma como* $(g + h)(x) = g(x) +_B h(x)$ *para todo* $x \in A$*, donde* $+_B$ *es la operación de grupo en* B*.*

  Es claro que $g+h \in \mathrm{Hom}(A, B)$*. Gracias a que* $+_B$ *es una operación conmutativa, entonces* $g + h = h + g$*, luego* $(\mathrm{Hom}(A, B), +)$ *es un grupo aditivo. Además, si* $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$ *entonces* $f \circ (g+h)(x) = f((g+h)(x)) = f(g(x) +_B h(x)) = f(g(x)) +_C f(h(x))$*, lo último gracias a que* h *es homomorfismo de anillo, luego obtenemos que* $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$*. La otra propiedad se deduce de forma similar.*
- ***Mod***$_R$ *es también una categoría preaditiva, en efecto, notemos que si* $g, h \in \mathrm{Hom}(A, B)$ *son dos* R*-módulo homomorfismos, entonces podemos definir su suma* $g+h$*, de la siguiente manera.*

  Recordemos que B *al ser un módulo por la izquierda consta de una operación conmutativa* $+_B$ *y un producto* $R \times B \to B$ *que es distributivo con respecto a* $+_B$*, entonces análogamente definimos* $(g + h)(x) = g(x) +_B h(x)$*, el hecho de que* $g + h$ *es tambíen un* $R-$*módulo homomorfismo y los pasos restantes se dejan al lector.*

Observación 10. *Dado que cada* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *en una categoría preaditiva es un grupo abeliano, este contiene así un elemento identidad, es decir un neutro aditivo; a este elemento, notado por* $0 : A \to B$*, se lo conocerá como el* ***cero morfismo*** *en* $\mathrm{Hom}(A, B)$

Como en posets, dentro de una categoría también existen elementos destacados, dos de los tipos más importantes son:

Definición. *Un objeto* I *en una categoría* $\mathscr{A}$ *de dice que es* ***universal*** *o* ***inicial*** *si es que para todo* $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ *existe una única flecha* $I \to A$*.*
Un objeto T *en una categoría* $\mathscr{A}$ *de dice que es* ***couniversal*** *o* ***terminal*** *si es que para todo* $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ *existe una única flecha* $A \to T$*.*

Es fácil notar que B es universal en $\mathscr{A}$, si y solamente si B es couniversal en $\mathscr{A}^{op}$, explicando su nombre. No en todas las categorías tenemos que objetos universales o couniversales existen, sin embargo cuando lo hacen sabemos que:

Lema 5.2. *Los objetos universales y couniversales son esencialmente únicos.*

Demostración. Consideremos dos objetos universales I e I' en una categoría $\mathscr{A}$. Por definición de objeto universal, sabemos que existen flechas $f : I \to I$ y $f' : I \to I$ que son únicas; pero también, porque son objetos iniciales, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_I"] & I' \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "1_{I'}"] & \\
 & I \arrow[r, "f"] & I'
\end{tikzcd}$$

Esto prueba lo requerido. El enunciado para objetos couniversales es el dual del anterior, es decir basta replicar lo hecho, ahora para $\mathscr{A}^{op}$. $\square$

Algunos ejemplos elementales son:

Ejemplo 5.3.

- *En la categoría **Set**, el conjunto vacío $\varnothing$ es un objeto universal, pues para cada conjunto A, existe solamente una función $f : \varnothing \to A$ con recorrido vacío. Por otro lado, todo conjunto unitario $\{x\}$ es un elemento couniversal en este categoría pues hay una y solamente una posible flecha $f : A \to \{x\}$, a saber, la que está definida por $f(a) = x$ para todo $a \in A$ (es común que al conjunto unitario $\{x\}$ se lo escriba simplificado como x, usaremos esta convención en las siguientes lecciones).*

- *En la categoría **Set*** los conjuntos unitarios $\{x\}$ son tambíen iniciales.Para ver esto, para todo conjunto A con punto distinguido x_A, entonces una flecha en **Set*** $f : \{x\} \to A$, se ve obligada a verificar $f(x) = x_A$.*

- *El grupo trivial $\{e\}$ es un objeto universal y couniversal en la categoría **Grp**.*

  El hecho de que sea couniversal es trivial, para probar que es universal fijémonos que un homomorfismo de grupo está obligado a respetar las identidades, por tanto, para todo grupo G existe un único $\varphi : \{e\} \to G$, pues $\varphi(e) = e_G$, con e_G el elemento identidad del grupo G.

En las siguientes lecciones nos encontraremos con más ejemplos.